

TW

**stichting
mathematisch
centrum**



AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 71/73

MAART

T.M.T. COOLEN, J. GRASMAN,
R. PLOEGER & G.M. WILLEMS

EEN EENVOUDIG WERELDMODEL MET STOCHASTISCHE EN
BESLISKUNDIGE ELEMENTEN

TW

2e boerhaavestraat 49 amsterdam

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Een eenvoudig wereldmodel met stochastische en besliskundige elementen

T.M.T. Coolen, J. Grasman, R. Ploeger en G.M. Willems

1. Inleiding

De werkgroep Biomathematica van het Mathematisch Centrum legt zich erop toe modellen te konstrueren en te analyseren die de ontwikkeling van populaties beschrijven (populatiodynamika). Hierbij kan men twee werkwijzen onderscheiden. In het ene geval probeert men een streng wiskundige analyse te maken van een eenvoudig model, zoals een Volterra-Lotka systeem [3]. Bij de andere methode gaat men uit van het te bestuderen verschijnsel en probeert zoveel mogelijk aspecten ervan in het model te vatten. Veelal zal het model zo gecompliceerd zijn, dat men zijn toevlucht neemt tot numerieke simulatie. Het onderzoek, waarvan verslag wordt gedaan in dit rapport, kan beschouwd worden als een verkenning van de problemen, die men hierbij ontmoet.

Tevens is dit rapport bedoeld om niet-wiskundigen een indruk te geven van de mogelijkheden, die men heeft bij het opzetten van een wereldmodel. Voor de wiskundige is het niet te vermijden dat hij buiten zijn wiskundig specialisme komt bij de behandeling van meer gecompliceerde modellen. Dit is op zichzelf niet erg daar de gebruikte wiskundige methoden vaak elementair zijn. Het komt er in de eerste plaats op aan dat hij zich weet aan te passen aan de nieuwe problematiek met zijn vaak moeilijk kwantificeerbare gegevens. Anderzijds zouden biologen, economen en sociologen bij het doen van experimenten en het verwerken van gegevens reeds aan het wiskundig model kunnen denken, zodat men bij het interdisciplinair werken niet het gevaar loopt om een tweede toren van Babel te bouwen in plaats van een bruikbaar wereldmodel.

Bij het opstellen van een wereldmodel hebben wij ons laten leiden door de gedachte, dat zo'n model beslissingen van bestuurders moet kunnen nabootsen. Aangezien bij deze beslissingen een groot aantal factoren betrokken zijn, die in ons model niet voorkomen, zullen wij tevens verstoringen van het model beschouwen. Deze kunnen deterministisch (b.v. periodieke verstoringen) of stochastisch zijn.

In het wereldmodel van Forrester [2] ligt de nadruk op de ontwikkeling van de produktiecapaciteit. Aan de hand van vele getabelleerde gegevens worden verbanden gelegd tussen grootheden, zoals populatie, vervuiling, voedselvoorraden en hun groei. Op deze wijze heeft men een model ontwikkeld dat de wereld als dynamisch systeem beschrijft. De tendens is dat exponentiële groei zichzelf teniet kan doen door de in het model veronderstelde terugkoppeling (uitputting). Voorgesteld wordt deze exponentiële groei bewust af te remmen (begrensde groei).

2. Een wereldmodel met sturing

In een tweetal artikelen [4,5] beschouwen Van der Grinten en De Jong een gewijzigd wereldmodel, waarin het mogelijk is te sturen. Zij analyseren dit met behulp van methoden uit de meet- en regeltechniek. Er worden een aantal *toestandsgrootheden* ingevoerd, die wij aangeven door de toestandsvektor $X = \{P, I, V, B\}$, de componenten van deze vektor zijn

P = populatie,
I = investeringen,
V = vervuiling,
B = bodemschatten.

De verandering van de toestandsvektor X voldoet aan de vergelijking

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = G(X) .$$

Wanneer men de verandering (de afgeleide) van de toestandsgrootheden geeft als funktie van de toestand X en als de toestand op een tijdstip $t = t_0$

bekend is,

$$(2) \quad X(t_0) = X_0 ,$$

dan is het mogelijk de toestandsvektor op het tijdstip t te bepalen.

Wanneer men spreekt van een *systeem*, dan bedoelt men een stelsel vergelijkingen van het type (1) met beginwaarden (2).

Als $t-t_0$ klein is, kunnen wij $X(t)$ benaderen door

$$(3) \quad X(t) \approx X_0 + (t-t_0)G(X_0) .$$

Door dit te herhalen kan een benadering voor $X(t)$ voor elke $t > t_0$ gevonden worden. Deze berekeningen worden op een computer uitgevoerd. Dit rekenproces is een voorbeeld van "numerieke integratie". Over het algemeen wordt niet formule (3) gehanteerd; er bestaan betere formules aangepast aan het stelsel vergelijkingen.

Daar X en G vektoren zijn stelt (1) eigenlijk een stelsel van 4 vergelijkingen voor, deze worden *differentiaalvergelijkingen* genoemd. Het stelsel differentiaalvergelijkingen, dat in [5] geformuleerd wordt, zal het uitgangspunt vormen van dit onderzoek:

$$(4a) \quad \frac{dP}{dt} = P\{a_1 u_1 f_1(V) f_2(MSL) - a_2 f_3(V) f_4(MSL)\} ,$$

$$(4b) \quad \frac{dI}{dt} = I\{a_3 u_2 f_5(B) - a_4\} - F(u_1, u_2, u_3, u_4) ,$$

$$(4c) \quad \frac{dV}{dt} = P u_3 f_6(I, P) - V/T_V ,$$

$$(4d) \quad \frac{dB}{dt} = -I u_4 f_5(B) ,$$

waarin $a_1 = .04$, $a_2 = .028$, $a_3 = .05$, $a_4 = .025$ en

$$(5a) \quad f_1 = -.015 V/V_0 + 1.015 ,$$

$$(5b) \quad f_2 = -.15 MSL + 1.15 ,$$

$$(5c) \quad f_3 = .05 V/V_0 + .95,$$

$$(5d) \quad \begin{aligned} f_4 &= -1.6 \text{ MSL} + 2.6 && \text{als } \text{MSL} \leq 1, \\ f_4 &= -.17 \text{ MSL} + 1.17 && \text{als } \text{MSL} > 1, \end{aligned}$$

$$(5e) \quad f_5 = B/B_0,$$

$$(5f) \quad \begin{aligned} f_6 &= I/P && \text{als } I \leq P, \\ f_6 &= 2I/P-1 && \text{als } I > P, \end{aligned}$$

$$(5g) \quad \text{MSL} = IB/(PB_0),$$

$$(5h) \quad T_V = .17 V/V_0 + .83.$$

De koppelingen tussen de toestandsgrootheden worden aangegeven door f_i . Merk op dat I en B niet afhangen van P en V , het is mogelijk het stelsel (3b), (3d) exact op te lossen voor $F = 0$, zie Appendix A. T_V is de halveringstijd voor de vervuiling. De coëfficiënten u_1 , u_2 , u_3 en u_4 zijn *stuurvariabelen*, zij hebben de waarde 1 als men niet stuurt. MSL (Material Standard of Living) is een maat voor de welvaart. De beginwaarden van het systeem, gegeven in genormeerde eenheden, zijn op het tijdstip $t_0 = 1970$

$$(6) \quad P_0 = I_0 = V_0 = 3.6 \times 10^9, \quad B_0 = 8 \times 10^{11}.$$

Het systeem is nu volledig gedefinieerd door (4), (5) en (6).

In dit onderzoek zal $F = 0$ gesteld worden. Er worden dus geen investeringen gevraagd om het systeem te sturen. Om de resultaten op deze wijze niet te flatteren wordt aangenomen dat men niet over de stuurcoëfficiënt u_3 beschikt ($u_3=1$), men kan dan in het model de vervuiling niet direkt bestrijden. Dit moet gebeuren door de investeringen af te remmen ($u_2 < 1$). Dit geldt voor het gegeven systeem. Kijken wij naar de werkelijkheid dan zou men de investeringen juist moeten stimuleren voor zover zij geen aanleiding geven tot vervuiling. Aangezien in dit model aangenomen wordt dat voor een

hoeveelheid nieuwe investeringen een evenredige hoeveelheid bodemschatten gebruikt wordt, zullen wij moeten stellen $u_2 = u_4$. De aanname, dat u_4 onafhankelijk van u_2 gevarieerd zou kunnen worden, zou betekenen dat in het model met nieuwe technologische middelen, die minder bodemschatten gebruiken (b.v. recycling), rekening gehouden wordt, zonder dat deze investeringen zouden vereisen. Wil men recycling in het model opnemen, dan is het noodzakelijk de functie $F \neq 0$ te kiezen.

In het hier uitgewerkte model wordt als volgt een stochastisch element ingebouwd. Het stelsel (4) wordt op de ELX8 van het MC numeriek geïntegreerd met behulp van een Modified Runge-Kutta schema. De coëfficiënten worden op vaste tijdstippen blootgesteld aan door het toeval bepaalde verstoringen. Men zou zich kunnen voorstellen dat op zo'n tijdstip door het computerprogramma een dobbelsteen gegooit wordt en dat afhankelijk van de worp het systeem een weg inslaat, die binnen de grenzen van de zich voordoende mogelijkheden ligt. Wanneer op vaste tijdstippen beslissingen genomen worden omtrent de eventuele veranderingen in u_1 en u_2 , dan verkrijgt men een ander model dan voorheen. Het is de bedoeling van dit onderzoek het gedrag van zo'n model te analyseren.

3. De mens in het systeem en andere beperkingen

In hoeverre is de toekomst bepaald ?

In de inleiding is reeds gesteld dat door het aanbrengen van verstoringen het model aannemelijker zal worden. Er zijn drie typen verstoringen aan te brengen:

- a. verstoringen van de coëfficiënten a_i en de koppelingsfactoren f_i . Het is te verwachten dat het model slechts een redelijke benadering zal geven voor het geval de toestandsvektor X in de omgeving van X_0 ligt, aangezien het rechterlid van (4) gebaseerd is op een locale benadering van $G(X)$ uit (1). Ook is in (4) geen rekening gehouden met een eventuele tijdsafhankelijkheid, zodat men voor een redelijke benadering ook $t-t_0$ klein moet nemen. Het is daarom waarschijnlijk dat de berekende waarden van a_i en f_i over enkele tientallen jaren of zelfs al over enkele jaren

niet meer op zullen gaan. Wat wij eigenlijk doen is extrapoleren vanuit het heden naar de toekomst. De veranderingen zullen echter niet stochastisch zijn, maar zullen een zekere trend vertonen. Zo heeft men door middel van f_2 en f_4 de invloed van de welvaart op de bevolkingsgroei willen vastleggen, men zou zich kunnen voorstellen dat in de loop van de tijd deze koppelingsfactoren andere waarden aan zullen nemen dan men nu vermoedt. Daar dit trendeffekt belangrijker is dan het randomeffect, zullen wij hier geen stochastische verstoringen op los laten. Helaas kan ook de trend er niet ingebracht worden, omdat wij niet bekend zijn met dergelijke toekomstverwachtingen voor systeemcoëfficiënten en koppelingsfactoren.

b. Verstoringen van de toestandsgrootheden

Hier doen zich twee mogelijkheden voor:

b1. verstoring van de beginwaarden

Men kan de invloed van deze verstoring op de toestandsgrootheden op een tijdstip $t(>t_0)$ nagaan. Wij hebben hier een keuze gemaakt en hebben alleen V_0 verkleind tot $1/4$ van zijn oorspronkelijke waarde. Het resultaat was dat binnen 10 jaar de vervuilingskromme weer ging samenvallen met de kromme behorende bij de oorspronkelijke V_0 . De oorzaak kan liggen in de kleine halveringstijd T_V of in de normering van het stelsel niet-lineaire differentiaalvergelijkingen.

b2. verstoringen voor $t > t_0$

Het systeem ondervindt invloeden van buiten af, het is dan niet autonoom meer. Het stelsel wordt geschreven als

$$(7) \quad \frac{dX}{dt} = G(X,t) .$$

Wij denken hierbij speciaal aan periodieke verstoringen. In paragraaf 7 zal de invloed van dergelijke verstoringen geanalyseerd worden.

c. verstoringen van de stuurcoëfficiënten

Wanneer de stuurcoëfficiënten volgens een gegeven schema gevarieerd worden afhankelijk van de waarden van de toestandsgrootheden (terugkop-

peling), dan kan dit geheel weer als een gesloten systeem beschouwd worden. Indien u_1 differentieerbaar naar t is, zou men bijvoorbeeld kunnen schrijven

$$(8a) \quad \frac{dX}{dt} = G(X,U) , \quad U = (u_1, u_2, u_3, u_4) ,$$

$$(8b) \quad \frac{dU}{dt} = V(X) .$$

De systeemverstoringen via u_1 van het teruggekoppelde systeem zijn het best te vergelijken met de systeemverstoringen via a_i en f_i van het systeem zonder terugkoppeling. De twee belangrijkste typen verstoringen via u_1 worden veroorzaakt door

- de beperkte nauwkeurigheid waarmee de toestandsgrootheden bepaald kunnen worden (verstoringen van $V(X)$).
- de beperkte nauwkeurigheid waarmee het stuurapparaat corrigeert (verstoringen van $G(X,U)$ via U).

Om bij het interpreteren van eventuele afwijkingen niet in moeilijkheden te geraken, houden wij slechts rekening met verstoringen van het tweede type.

Hoe wordt er gestuurd ?

Wanneer men een model construeert, waarbij de stuurvariabele gekoppeld wordt aan het systeem door een stelsel (8b) maakt men een zodanige idealisering dat het model redelijk hanteerbaar wordt. Het lijkt ons op het moment echter zinvoller om een andere aanname te maken, waarbij de sturingscoëfficiënten discontinu variëren. De overweging hierbij is dat het sturen vaak een discontinu karakter vertoont, er wordt ingegrepen als er een drempel bereikt wordt (de crisissituatie). In het vervolg zal daarom aangenomen worden dat u_1 stapsgewijs varieert. Er bestaan drie mogelijkheden:

- u_1 vermindert met een zeker percentage,
- u_1 blijft onveranderd,
- u_1 neemt toe met een zeker percentage.

Als de onder c genoemde verstoring een normale verdeling heeft, dan is voor het geval de beslissing genomen wordt om niet te sturen de verdeling van u_i gegeven in figuur 1. Wanneer u_i met een fraktie s_i verminderd wordt dan wordt de verdeling als in figuur 2.

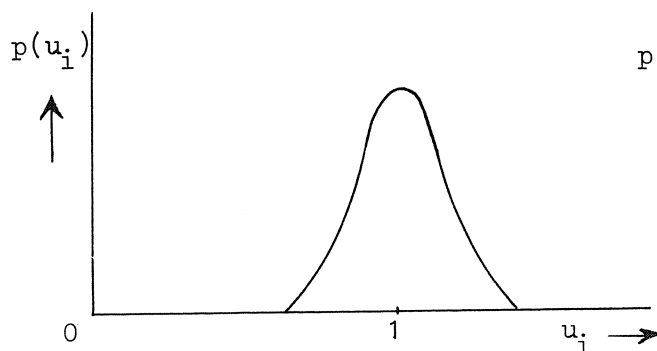


fig. 1

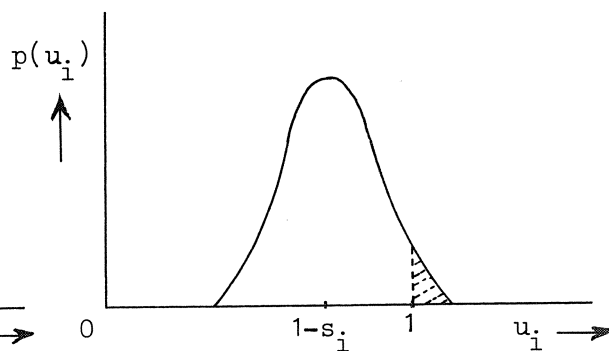


fig. 2

In het computerprogramma zal punt c als volgt verwerkt worden. Eerst wordt er bepaald of er bijgestuurd moet worden, als dat zo is, dan wordt

$$u_{i_{\text{gest}}} = u_{i_{\text{oud}}} (1 \pm s_i) .$$

Vervolgens wordt de verstoring aangebracht, zodat

$$u_{i_{\text{verst}}} = u_{i_{\text{gest}}} (1 + kr_i) .$$

De verstoring kr_i is niet normaal verdeeld, maar homogeen: d.w.z. k is een getal dat getrokken wordt uit een verzameling met een homogene verdeling op het interval $[-1, +1]$, r_i is de maximale verstoring. Aannemende dat men niet in staat is buiten de grenzen van waarschijnlijke toestanden te sturen, kiezen wij $r_i > s_i$. Doordat een gerichte sturing op zijn beurt weer verstoord wordt, kan het resulterend effect tegengesteld zijn aan de bedoelde ingreep, indien

$$(1-s_i)(1+r_i) > 1 \quad \text{of} \quad (1+s_i)(1-r_i) < 1 .$$

In het hier uitgewerkte model wordt het sturen gediscretiseerd in tijdstippen met een vaste onderlinge afstand. Men zou zich kunnen voorstellen dat op deze wijze het periodiek wisselen van (mondiale) regeringen gesimuleerd wordt. De periode zal daarbij gevarieerd worden van 1 tot 16 jaar.

Wat wordt belangrijk gevonden ?

Forrester spreekt van Material Standard of Living (welvaart) en Quality of Life (welzijn). Deze grootheden moeten door geschikte sturing maximaal worden. Daar men echter ook aan de mens van de toekomst moet denken, zal men een gewogen gemiddelde van deze grootheden willen optimaliseren. Van der Grinten en De Jong maakten de veronderstelling dat wij bij het streven naar welzijn, naast het welzijn van onszelf ook het welzijn van de mens over 100 jaar zullen betrekken. Wij willen deze veronderstelling niet overnemen, maar keren terug naar de basisgrootheden en nemen aan dat de mens er prijs op stelt dat

- a. de bevolking beneden een zeker maximum en boven een zeker minimum blijft,
- b. de vervuiling beneden een vastgesteld maximum blijft,
- c. de hoeveelheid bodemschatten binnen een zekere tijd niet halveert, hetgeen inhoudt dat verondersteld wordt dat men bij deze variabele in staat is een trend te herkennen.

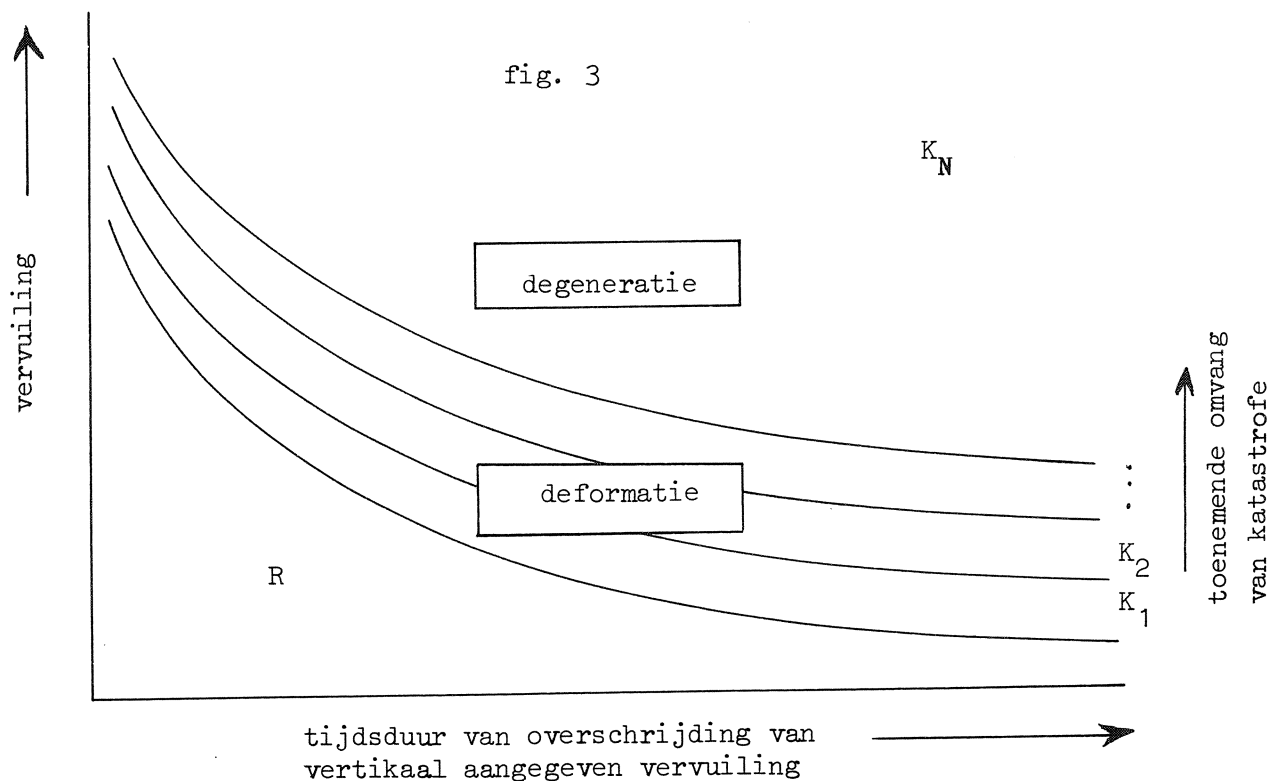
Bij de simulaties is gebleken dat in het model de benedengrens voor de bevolking de eerste volgende 175 jaar niet overschreden wordt zolang wij deze op minder dan $2/3$ van het huidige peil stellen. Eveneens bleek dat door sturing via $u_2 (=u_4)$ de halveringstijd van de bodemschatten redelijk snel gekorrigeerd kon worden. Wij zullen deze deelproblemen daarom in het vervolg niet meer in de beschouwing betrekken.

Hoe worden katastrofen voorkomen ?

Wanneer één of meerdere grenzen van het type a, b of c gedurende een zekere periode worden overschreden, zodat de wereld als systeem van het ene op het andere moment niet meer door (4), (5) en (6) beschreven wordt,

dan zeggen wij dat er sprake is van een *katastrofe*. Men zou zich er op toe kunnen leggen het model op zodanige wijze uit te breiden dat ook katastrofen in het systeem bevat zijn door aan de toestandsvariabelen van het huidige systeem een aantal toestandsvariabelen en parameters toe te voegen, waardoor een relatie tussen die nieuwe en oude variabelen gelegd kan worden, die diskontinuiteiten in de huidige variabelen mogelijk maakt. Wij zullen hier bij de slotopmerkingen op terugkomen.

Wij gaan nu na hoe het met behulp van het tot nu toe behandelde systeem mogelijk is te beschrijven wat zich afspeelt bij een katastrofe. In het simulatieprogramma zal de katastrofe gerepresenteerd worden door volgens een vaste formule bepaalde, abrupt optredende veranderingen van toestandsgrootheden en coëfficiënten van het stelsel (4), (5). Laten wij de overschrijding van een maximaal toelaatbare vervuiling als voorbeeld nemen. Uit figuur 3 kan men aflezen op welk moment men een katastrofe kan verwachten bij gegeven vervuiling. De geschetste kromme is gebaseerd op de situatie dat de individuele mens wordt blootgesteld aan elektrische stroom of radioactiviteit (deze veronderstelling is sterk spekulatief; hij maakt het ons echter mogelijk iets konkreets te zeggen).



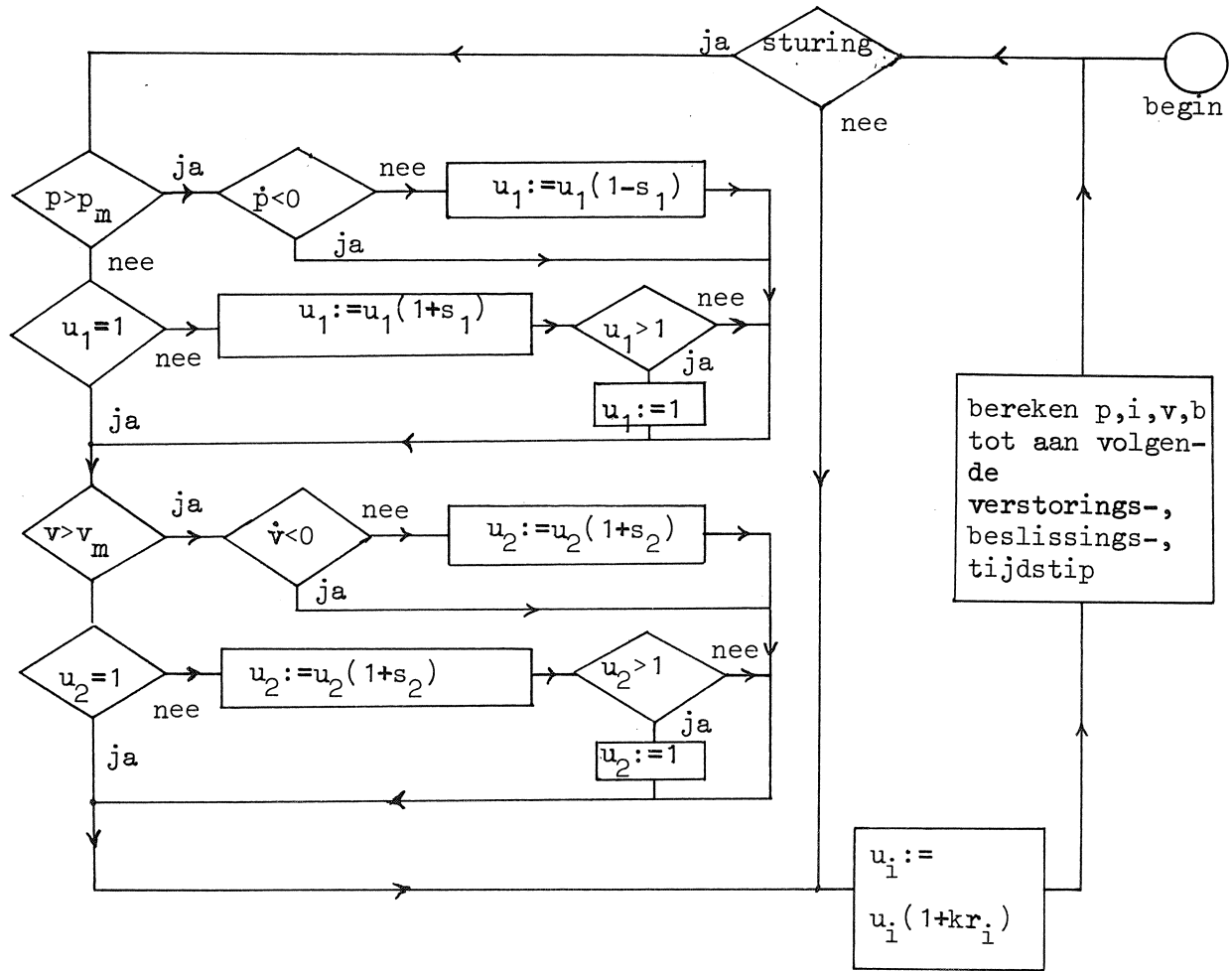
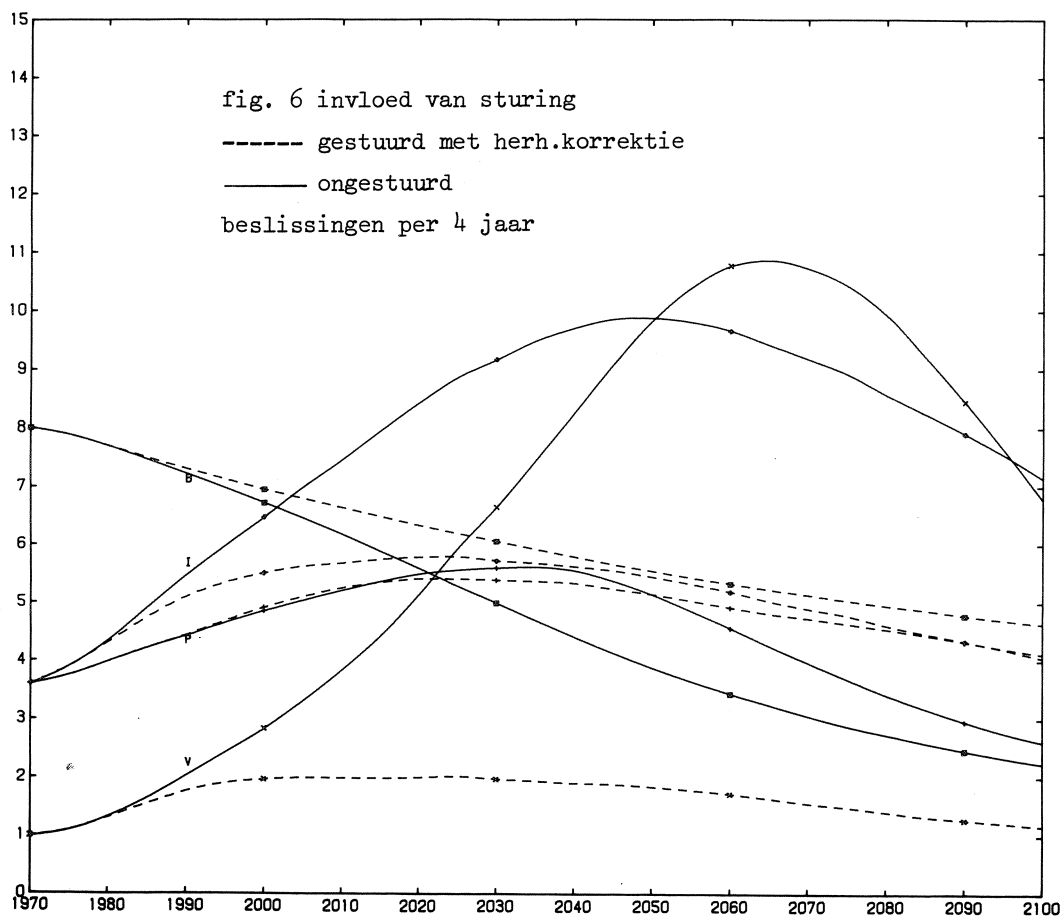
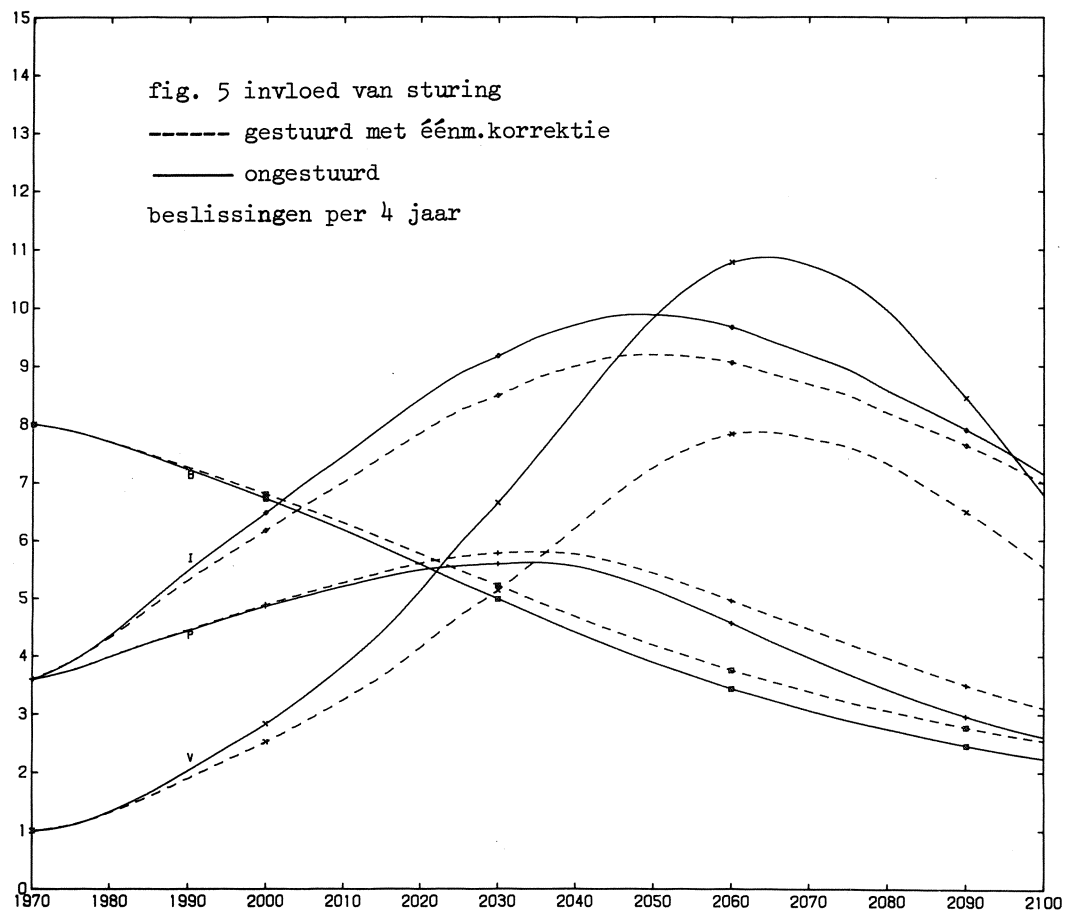


fig. 4



K_N is het gebied waar het systeem degenereert, d.w.z. één of meerdere toestandsgrootheden worden konstant (b.v. nul) en hebben geen invloed meer op de andere. In het gebied R blijft het systeem (4), (5), (6) onaangetast. De twee gebieden worden gescheiden door een band van gebieden $K_0, K_1, \dots, K_{N-1}$, waar katastrofen optreden die het systeem kunnen deformeren. Voor biologen, economen, sociologen en politici ligt hier een taak. Ten eerste zouden zij moeten aangeven wat de katastrofengebieden zijn. Ten tweede zullen zij de gegevens moeten verschaffen welke het mogelijk maken de katastrofen in het programma te representeren.

Wij onderscheiden:

- a. katastrofen waarbij het systeem zich herstelt, bijvoorbeeld P, I of B worden gehalveerd of gedecimeerd op het moment van overschrijding. Men zou deze als nieuwe beginwaarden kunnen beschouwen.
- b. katastrofen waarbij het systeem blijvend deformeert. De coëfficiënten a_1 en de koppelingsfactoren veranderen blijvend. In dat geval zal er een nieuwe katastrofengrafiek gekonstrueerd moeten worden.

Bij het gegeven beslissingsschema kan men door het uitvoeren van simulaties de mate van ingrijpen (s_2) via de investeringen bepalen, opdat men in gebied R blijft. Als s_2 ontoelaatbaar groot zou worden, dan kan men nagaan waar men terecht komt bij de uiterst haalbare s_2 .

4. Het beslissingsschema

Figuur 4 geeft het schema volgens welke de beslissingen genomen worden. Indien $V > V_{\max}$ dan wordt u_2 met een fraktie s_2 verminderd, dit gebeurt bij iedere beslissing opnieuw, totdat V gaat afnemen, dan laat men u_2 ongewijzigd. Als echter $V < V_{\max}$, dan wordt u_2 telkens met een fraktie s_2 vermeerderd, totdat $u_2 = 1$. Eenzelfde regel wordt toegepast ten aanzien van P en u_1 . In figuur 5 zien wij het resultaat als men niet herhaald bijstuurd, maar slechts éénmalig corrigeert, waarbij de correctie ongedaan gemaakt wordt, als de toestandsgrootheid weer onder de maximaal toelaatbare waarde komt. Figuur 6 geeft een indruk van de invloed van herhaalde correcties, zoals wij die hierboven beschreven hebben.

5. Maximale variaties in de toestandsgrootheden

Bij het bepalen van de variaties in de toestandsgrootheden voor zowel het ongestuurde als gestuurde probleem bleek het zinvol voor de maximale verstoringen r_i respektievelijk de waarden

$$r_1 = .025, \quad r_2 = .075, \quad r_3 = 0, \quad r_4 = r_2$$

te kiezen. Zowel voor het sturen met éénmalige korrektie als met herhaalde korrektie kozen wij

$$s_1 = .02, \quad s_2 = .05, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = s_2,$$

$$P_{\max} = 5 \times 10^9, \quad V_{\max} = 4 \times 10^9.$$

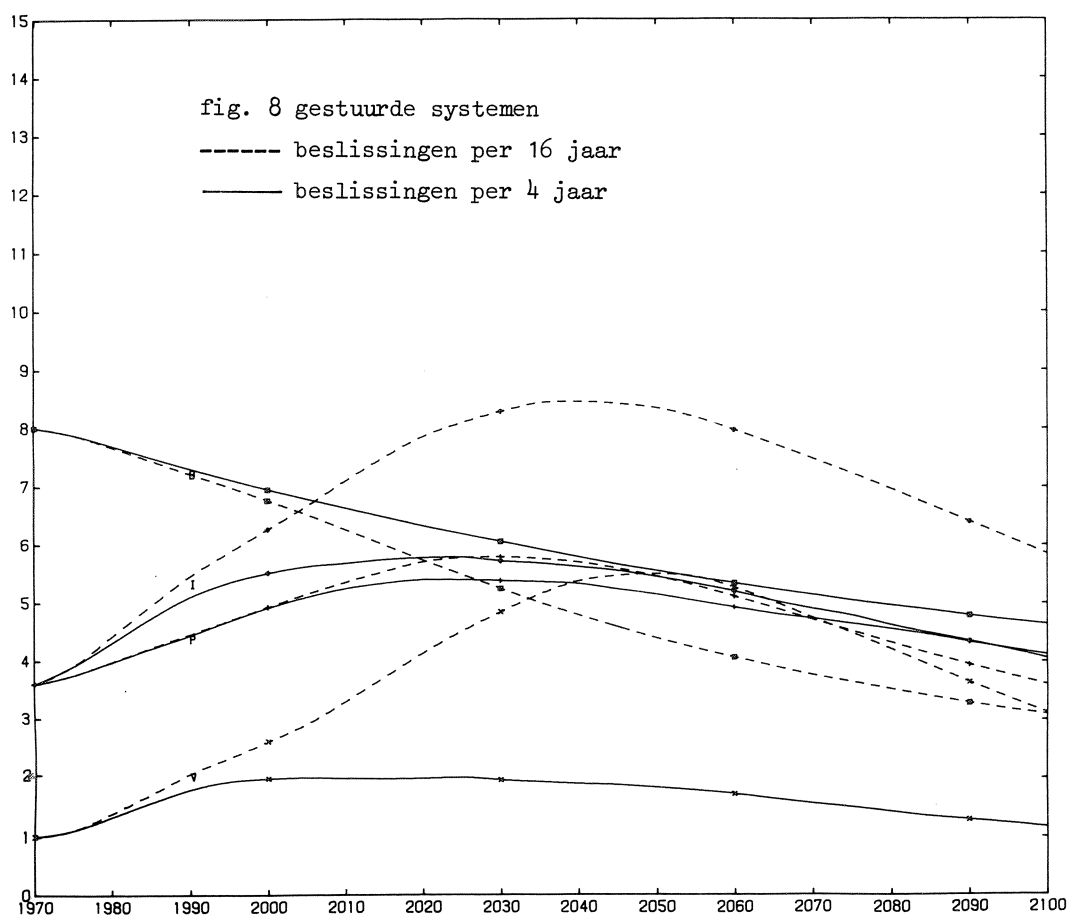
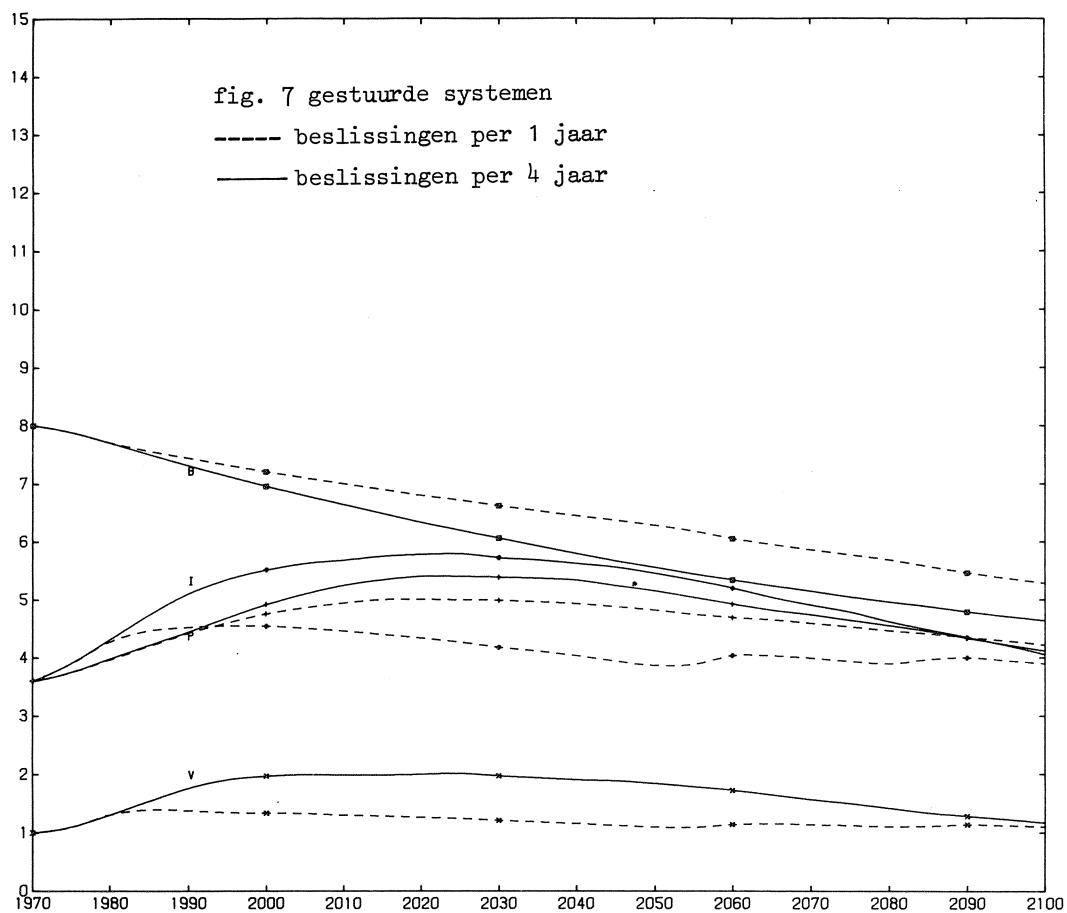
In de laatste paragraaf komen wij nog terug op de keuze van deze getallen. De periode tussen twee tijdstippen, waarop beslist wordt over de waarden van de stuurcoëfficiënten, is vier jaar genomen. In het ongestuurde model is deze periode ook aangehouden voor de verstoringen. De waargenomen variaties in de toestandsgrootheden zijn gegeven in tabel I.

model	maximale variaties* in % van			
	P	I	V	B
ongestuurd	3.8	2.1	8.9	2.7
gestuurd éénm. korr.	2.8	2.0	6.3	2.3
gestuurd herh. korr.	1.0	3.6	6.6	1.7

* over 8 runs

Tabel I

Gezien het geringe effect van éénmalig corrigeren (zie fig. 5) zullen wij deze wijze van sturen verder niet meer in onze beschouwing betrekken.



6. Invloed van de beslissingsperiode op het gestuurde systeem

In de figuren 7 en 8 stellen wij gestuurde systemen met een beslissingsperiode van 1 en 16 jaar tegenover een gestuurd systeem met een beslissingsperiode van 4 jaar. Bekijken wij de resultaten voor jaarlijkse bijsturing dan valt op dat de toestandsgrootheden onderhevig zijn aan sterke fluktuaties (de eerste afgeleide varieert sterk). Het is zelfs zo dat de oplossing na enige tijd gaat oscilleren in een omgeving van de toegestane maximale vervuiling. Hoewel het beoogde effect, terugdringing van de vervuiling, wel bereikt wordt, is deze korte beslissingsperiode niet te verkiezen. Iedere ingreep vereist een zekere "inspanning" of in termen van het wereldmodel "investeringen" (De in [5] geïntroduceerde funktie $F(u_i)$ zou beter $F(u_i, \dot{u}_i)$ gesteld kunnen worden). Weliswaar hebben wij dit niet in het model opgenomen, het is echter mogelijk om bij het zoeken naar een optimale beslissingsperiode hier toch rekening te houden. Het sturen met korrekties om de 16 jaar heeft het overwegende bezwaar, dat het beoogde resultaat in het geheel niet benaderd wordt. Verdere berekeningen laten zien dat de meest wenselijke periode tussen 3 en 6 jaar ligt. In table II zijn de maximale variaties van de toestandsgrootheden voor de diverse beslissingsperioden gegeven.

beslissings- periode in jaren	maximale variaties* in % van			
	P	I	V	B
1	0.6	3.6	3.2	0.9
4	1.0	3.6	6.6	1.7
8	2.6	4.8	12.3	4.2
16	6.5	5.9	20.0	4.4

* over 8 runs

Tabel II

Wij hebben de simulaties ook uitgevoerd voor het geval de stuurcorrectie s_1 evenredig is met de beslissingsperiode, zodat men na een voldoende aantal jaren op gelijke waarden van de stuurvariabelen kan uitkomen voor de diverse gestuurde systemen. Het resultaat was dat men, weliswaar minder geprononceerd, toch dezelfde verschijnselen bleef waarnemen.

7. Invloed van conjunktuurfluctuaties op het gestuurde systeem

Wij nemen nu aan dat in het model de nieuwe investeringen op een zodanige wijze periodiek verstoord worden, dat de vergelijkingen (4b) en (4d) overgaan in

$$(4b^*) \quad \frac{dI}{dt} = I[a_3 u_2 f_5(B) \{1+c \sin(2\pi t/T_c - \phi_c)\} a_4] - F(u_1, u_2, u_3, u_4) ,$$

$$(4d^*) \quad \frac{dB}{dt} = -I u_4 f_5(B) \{1+c \sin(2\pi t/T_c - \phi_c)\} .$$

Men zou hierbij kunnen denken aan de invloed van *conjunktuurfluctuaties*. Bij iedere simulatie worden de amptitude van de verstoring c , de periode T_c , de beginfase ϕ_c en de beslissingsperiode (of verstoringperiode) T_b konstant gehouden. Het zal blijken dat de conjunktuurschommelingen de investeringen direkt beïnvloeden en dat de vervuiling volgt met een zekere vertraging. Bij het ongestuurde systeem middelt de invloed van deze externe periodieke verstoring uit.

Voor het gestuurde systeem onderscheiden wij twee gevallen.

- a. $T_c \neq T_b$, het blijkt dat de invloeden van de conjunktuurschommelingen redelijk uitmiddelen over de periode 1970-2100.
- b. $T_c = T_b$, er kunnen diverse situaties ontstaan. In de volgende voorbeelden is $T_c = T_b = 6$ jaar.

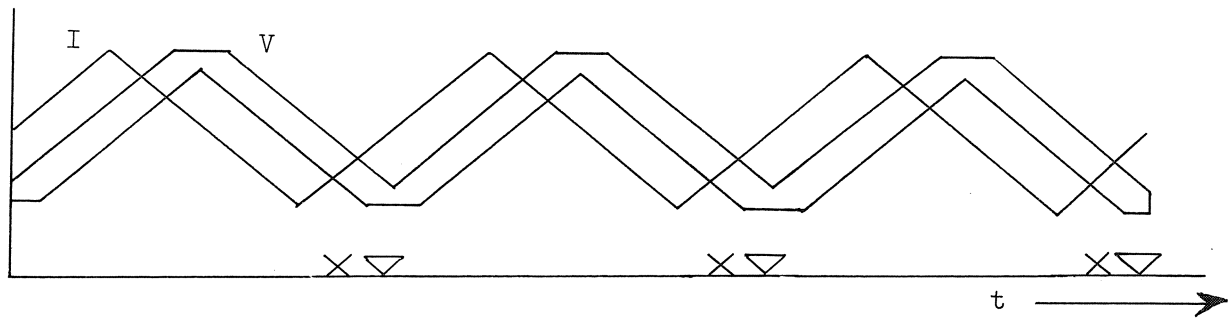


fig. 9

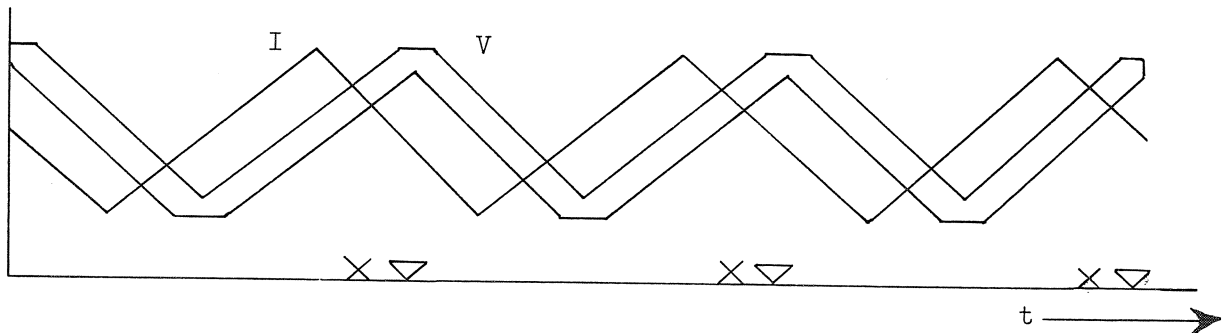


fig. 10

- investeringsfluctuaties
- ▭ vervuilingsfluctuaties
- ▽ beslissingstijdstip
- × vergelijkingstijdstip ter bepaling van het teken van $\dot{I}$ en $\dot{V}$

In de figuren 9 en 10 zijn twee karakteristieke gevallen geschetst. In figuur 9 vallen de beslissingstijdstippen in een conjunkturfase die een positieve invloed heeft op de investeringen en een remmende invloed op de vervuiling. Het resultaat is te zien in figuur 11; de investeringen en de vervuiling stijgen ver boven hun oorspronkelijke waarden ($\pm 50\%$); er is geen sprake van uitmiddelen. In tegendeel, de gevolgen van een reeks onjuiste beslissingen stapelen zich op. Wij hebben hier te maken met een soort *resonantie* effect. In figuur 10 starten de conjunkturschommelingen in tegenovergestelde richting als in figuur 9. Nu vallen de beslissingstijdstip-

fig. 11 invloed van conjunktuur-
fluktuaties op gestuurd
systeem.

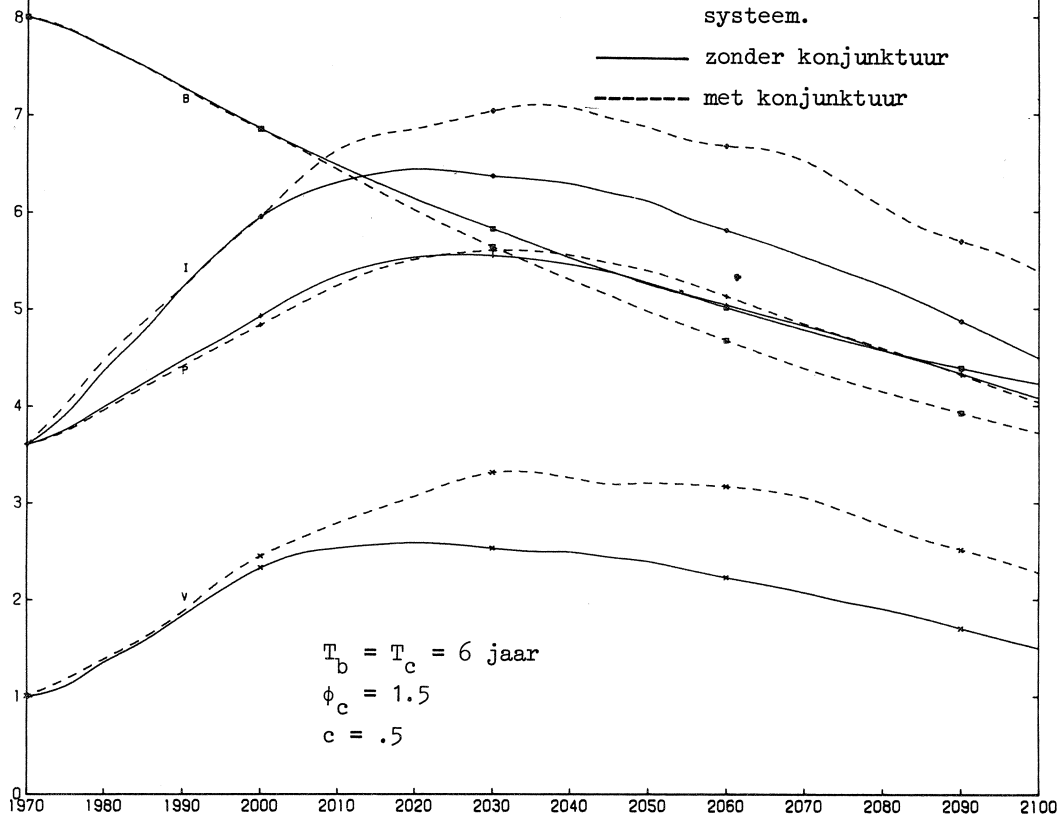
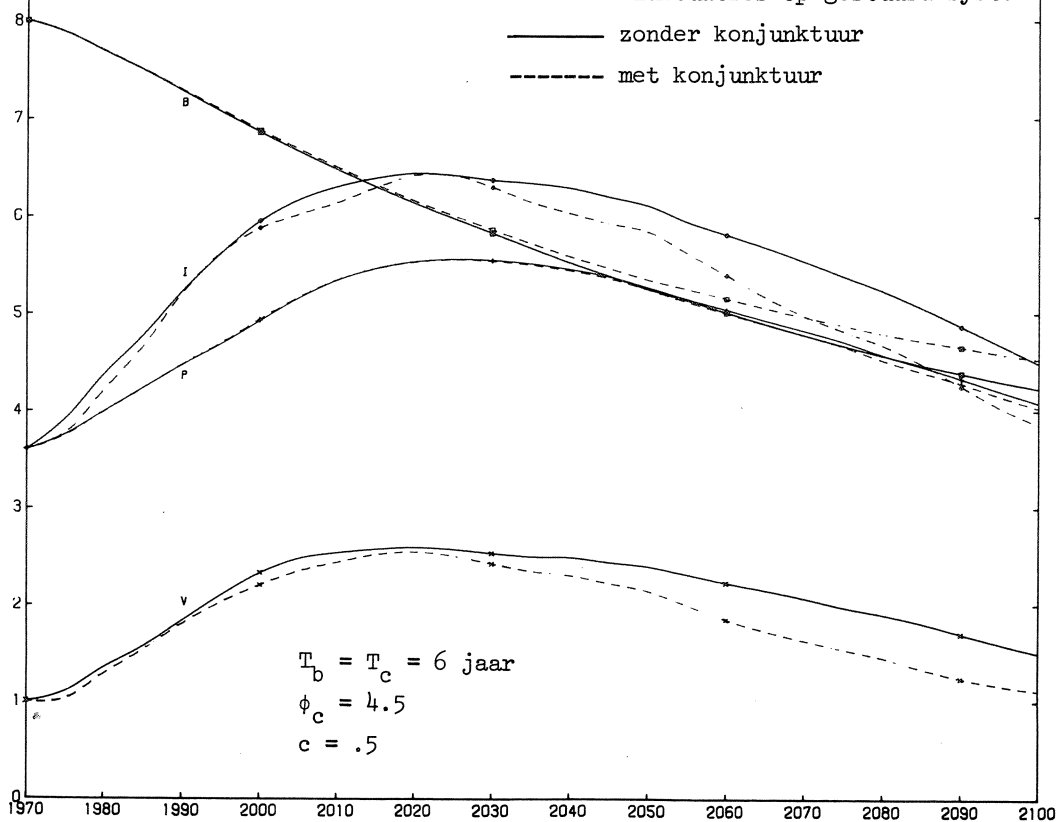
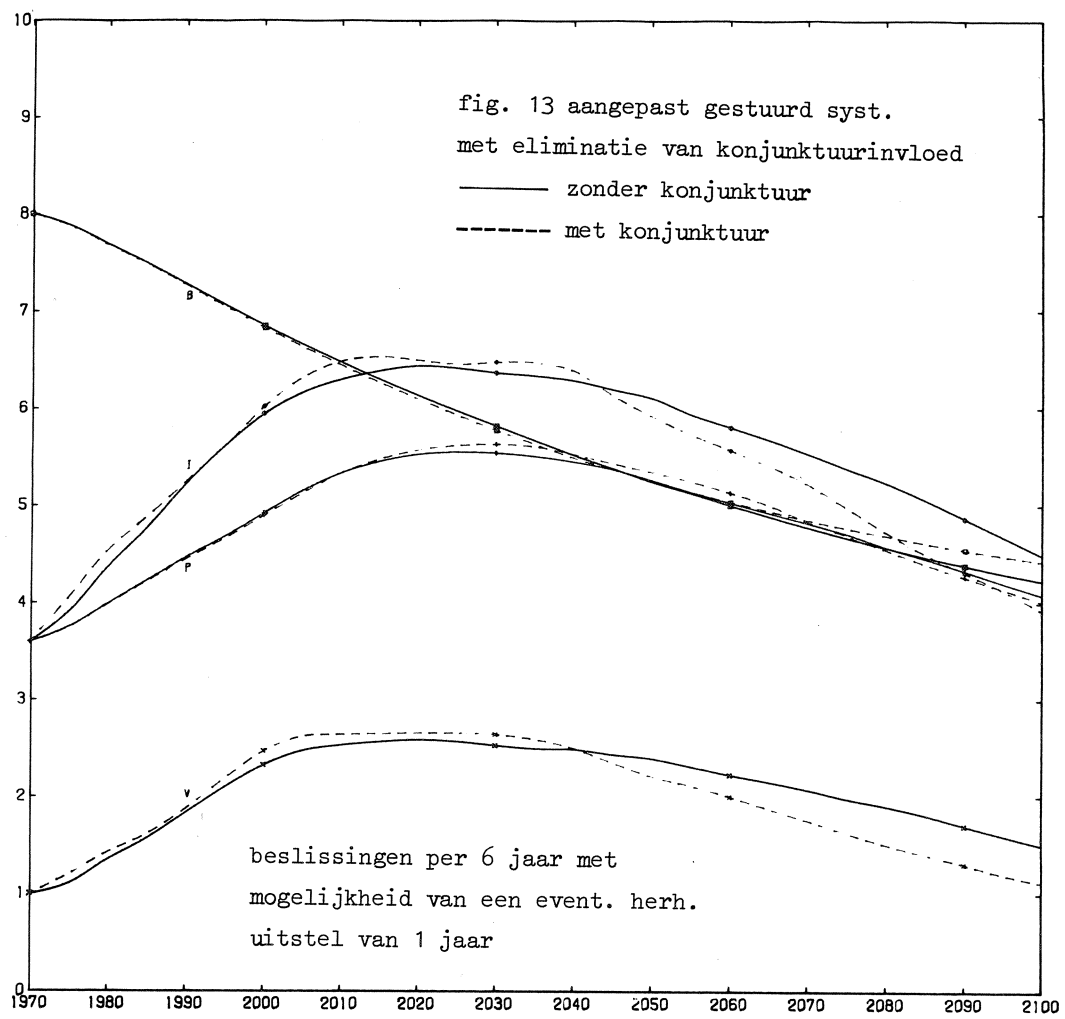


fig. 12 invloed van conjunktuur-
fluktuaties op gestuurd syst.





pen op momenten waarop de investeringen achter blijven en de vervuiling toeneemt. Het resultaat is afgebeeld in figuur 12. Vervuiling en investeringen liggen $\pm 25\%$ onder de overeenkomstige waarden van het systeem zonder conjunktuur.

Hoe kunnen deze onverwachte effecten verklaard worden ? Het antwoord ligt besloten in het beslissingspatroon. Dit is zodanig, dat in een situatie waarin de vervuiling daalt, maar groter is dan de toegestane waarde, de stuurcoëfficiënt u_2 ongewijzigd blijft. Als de vervuiling stijgt en groter is dan de toegestane waarde, dan wordt er sterker afgeremd (u_2 wordt kleiner), zie figuur 4. In figuur 9 wordt op ieder beslissingstijdstip de vervuiling afgeremd ten gevolge van de verstoring van de investeringen. Als de vervuiling het globale maximum nadert, treden zodanige schommelingen in V op dat deze zelfs even daalt ten tijde van de beslissing. Er wordt dan te weinig afgeremd op weg naar de vervuilingstop, waardoor de vervuiling de kans krijgt om behoorlijk te stijgen. In figuur 10 vertoont de vervuiling juist een sterk opgaande tendens op de beslissingstijdstippen. Dit heeft extra afremming van de vervuiling tot gevolg. Bij het nemen van de beslissing was men telkens te pessimistisch.

Hoe zou men nu de eventuele invloed van conjunktuurschommelingen geheel kunnen elimineren ? Een oplossing zou zijn om alleen een beslissing te nemen om af te remmen als zowel de vervuiling als de investeringen stijgen, en niets te doen als beide dalen, in de andere gevallen wordt de beslissing telkens één jaar opgeschort, totdat de vervuiling en de investeringen gelijk opgaand of neergaand zijn. Aangezien de fluktuaties zelf niet waar te nemen zijn in de grafieken, geven wij in appendix B de numerieke resultaten behorende bij een dergelijke simulatie, waarbij uitgegaan is van de ongunstige situatie van figuur 11. Het resultaat is te zien in figuur 13; de invloed van de conjunktuurschommelingen wordt inderdaad uitgemiddeld.

8. Enige gevolgtrekkingen

Alvorens konklusies te trekken uit de resultaten van dit onderzoek, zullen wij eerst enkele beperkingen van dit model vermelden:

- a. Het beslissingsschema is gebaseerd op de aanname, dat men bij het nemen van beslissingen niet geleid wordt door een kwantitatieve analyse van P, I, V en B. Er wordt bovendien geen rekening gehouden met trends (voor de bodemschatten wel). Dit zijn beperkingen die wij ons bewust opgelegd hebben.
- b. Konjunktuurfluctuaties worden beschouwd als een externe periodieke verstoring van het systeem. In een uitgebreider model zou de konjunktuur zich moeten manifesteren als een uitvloeisel van systeem + beslissingspatroon. In het geval van jaarlijkse sturing (fig. 7) treedt een vergelijkbaar verschijnsel op. De oplossing fluctueert dan in een omgeving van de maximaal toelaatbare vervuiling.
- c. Bij het kiezen van de waarden van de stuurvariabelen s_i hebben wij ons in de eerste plaats laten leiden door de "reakties" van het wiskundig model en hebben dié waarden genomen, die een significant effect hadden. Wij zullen dan ook niet pogen de resultaten te interpreteren naar de numerieke uitkomsten. Voorop staat de ontwikkeling van een model dat de interactie tussen de wereld als systeem enerzijds en de mens als stuur-systeem anderzijds beschrijft.

De konklusies die wij, rekening houdend met de bovengenoemde beperkingen, kunnen trekken zijn de volgende:

- a. Het is mogelijk een beleid te voeren, waarbij beslissingen genomen worden, die gebaseerd zijn op kwalitatieve gegevens. Onder een *beleid* verstaan wij in het model een vooraf gegeven schema volgens welke de stuurcoëfficiënten gevarieerd worden afhankelijk van de waarden van de toestandsgrootheden.
- b. Wanneer in een systeem méér dan één periodiek proces bevat is, dan kunnen kumulatieve verschijnselen optreden (resonantie). In het wereldmodel is als voorbeeld genomen het beslissingsproces (mondiale meerjaren plannen of regeringswisselingen) en konjunktuurfluctuaties.
- c. In het algemeen is een gestuurd model gevoeliger voor verstoringen van de coëfficiënten u_1, u_2 . Dit is als volgt te verklaren: door het stochastisch element kan het tijdstip dat men besluit in te grijpen enigszins variëren. Valt dit tijdstip aan de vroege kant, dan blijft de in-

greep langer inwerken op het systeem. Passeert men een aantal beslissingstijdstippen dan waaieren de diverse runs steeds verder uit elkaar. Wanneer de beslissingstijdstippen echter dicht op elkaar liggen, dan kan dit divergente karakter teniet gedaan worden.

- d. Indien wij in staat zouden zijn katastrofen in het model op te nemen zoals voorgesteld in paragraaf 3, dan zou het stochastisch element een niet te missen schakel vormen in de simulatie van het wereldgebeuren. Tot nu toe is het zo dat bij voldoende klein gekozen r_i de schare van oplossingen voor diverse runs willekeurig dicht bij elkaar komen te liggen. Of in wiskundige termen: de toestandsvektor X ligt op een tijdstip t_ω in een gebied Ω en voor $r_i \rightarrow 0$ trekt Ω zich samen in een punt O .

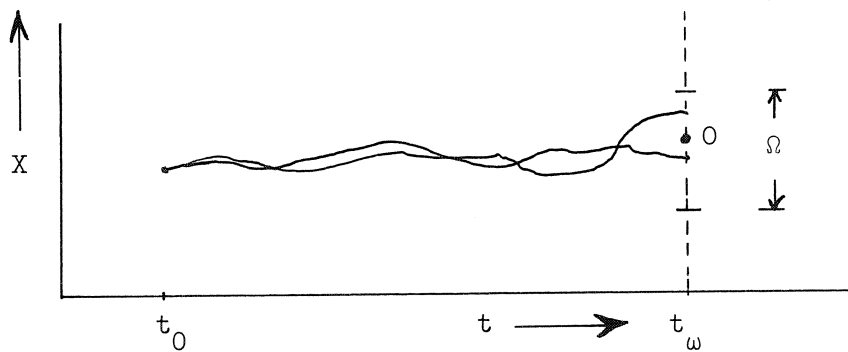


fig. 14

Als wij katastrofen invoeren, dan is bij zekere waarden van s_i , a_i en f_i een serie runs mogelijk, waarvoor X op het tijdstip t_ω tot een n -voudig samengesteld gebied behoort. Voor $r_i \rightarrow 0$ trekken de gebieden Ω_k zich samen in de punten O_k ($k=1,2,\dots,n$).

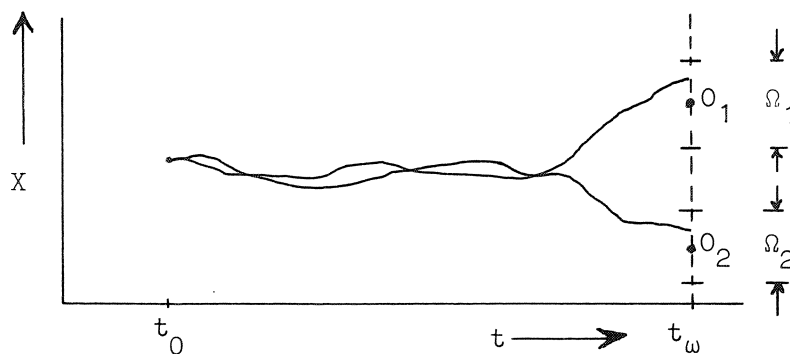


fig. 15

In figuur 15 is de situatie voor $n = 2$ geschetst. Een run voor die waarden van s_i , a_i en f_i loopt langs een kritiek pad, dat zich op een zeker tijdstip splitst ten gevolge van een kleine verstoring, die de ene keer het pad naar Ω_1 en de andere keer naar Ω_2 geleidt. Deze overgang van de ene familie van oplossingen naar de andere komt overeen met het bestaan van een separatrice in de faseruimte van het dynamisch systeem. Mogelijk zou het te overwegen zijn dit verschijnsel ook in verband te brengen met bifurkaties. In [8] geeft Wiener een aantal voorbeelden van systemen die allen een dergelijke onbepaaldheid van de toestandsgrootheden met elkaar gemeen hebben. Zonder de suggestie te willen wekken dat deze problematiek direct aansluit bij bekende methoden uit de *biomathematica*, noemen wij twee onderwerpen die een zekere verwantschap met het bovenstaande vertonen. Dat zijn de studie van drempelverschijnselen in een zenuwmembraan (de regel van "all or nothing") [1] en het onderzoek van singulariteiten van systemen met behulp van differentiaaltopologie [7,9].

Literatuur

- [1] R. Fitz-Hugh, Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane.
Bulletin of Mathematical Biophysics, vol. 29 (1967), 217-226.
- [2] J.W. Forrester, World dynamics.
Wright-Allen Press, Cambridge (1971)
- [3] J. Grasman en E. Veling, An asymptotic formula for the period of a Volterra-Lotka system.
Mathematisch Centrum TN79/72, Amsterdam (1972).
- [4,5] P.M.E.M. van der Grinten en P.J. de Jong, Werelddynamica, gezien vanuit systeem- en regeltechniek, en Werelddynamica, uitgangspunt voor een wereldbeleid ?
Chemisch weekblad, 10 december 1971 en 10 maart 1972.
- [6] D. Meadows, Rapport van de Club van Rome.
Het Spektrum Utrecht, Aula 500 (1972).

- [7] R. Thom, Stabilité structuel et morphogenèse.
Benjamin Press (1972).
- [8] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory.
Technology Press of the M.I.T. & Wiley (1958)
- [9] E.C. Zeeman, A catastrophe machine.
Mathematics Institute, Univ. of Warwick (1972).

Appendix A

Wij beschouwen het deelsysteem

$$\frac{dI}{dt} = \frac{a_3 u_2}{B_0} IB - a_4 I ,$$

$$\frac{dB}{dt} = - \frac{u_4}{B_0} IB .$$

met $I = I_0$ en $B = B_0$ op het tijdstip $t = t_0$. Voor de baankrommen in de fase-ruimte geldt

$$\frac{dI}{dB} = - a_3 \frac{u_2}{u_4} + \frac{a_4}{u_4} \frac{B_0}{B} ,$$

Integratie levert

$$I = I_0 - a_3 \frac{u_2}{u_4} (B - B_0) + \frac{a_4}{u_4} B_0 \log \frac{B}{B_0} ,$$

In onderstaande figuur is deze oplossing geschetst.

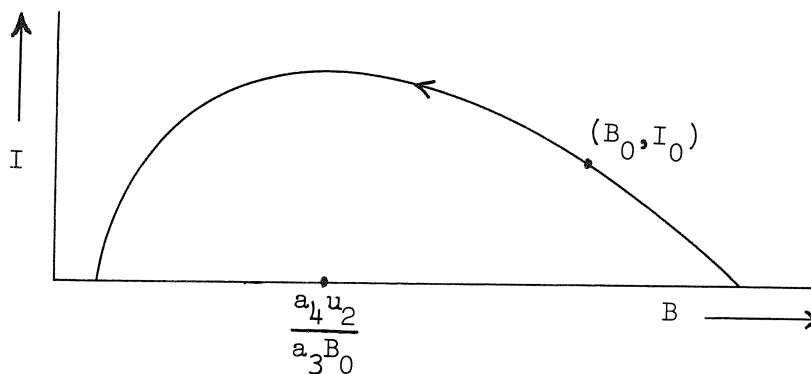


fig. A₁

Trachten wij $B = B(t)$ te bepalen dan stuiten wij op een integraal, die karakteristiek is voor problemen uit de populatiedynamika, zie ook [3]:

$$\int_{\log B_0}^{\log B} \frac{db}{\{I_0 + a_3 \frac{u_2}{u_4} B_0 - \frac{a_4}{u_4} B_0 \log B_0 - a_3 \frac{u_2}{u_4} e^b + \frac{a_4}{u_4} B_0 b\}} = t - t_0 .$$

Appendix B

JAAR	U ₁	U ₂	U ₁	U ₂	pop.	inv.	verv.	bod.
	(verstoord)		(gepland)					
1970	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+361 ₁₀ +10	+364 ₁₀ +10	+361 ₁₀ +10	+799 ₁₀ +12
1971	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+366 ₁₀ +10	+382 ₁₀ +10	+376 ₁₀ +10	+795 ₁₀ +12
1972	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+370 ₁₀ +10	+398 ₁₀ +10	+405 ₁₀ +10	+791 ₁₀ +12
1973	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+375 ₁₀ +10	+406 ₁₀ +10	+431 ₁₀ +10	+787 ₁₀ +12
1974	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+380 ₁₀ +10	+407 ₁₀ +10	+444 ₁₀ +10	+783 ₁₀ +12
1975	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+384 ₁₀ +10	+410 ₁₀ +10	+449 ₁₀ +10	+779 ₁₀ +12
1976	+1.02	+1.02	+1.00	+1.00	+389 ₁₀ +10	+423 ₁₀ +10	+460 ₁₀ +10	+775 ₁₀ +12
1977	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+394 ₁₀ +10	+439 ₁₀ +10	+483 ₁₀ +10	+771 ₁₀ +12
1978	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+398 ₁₀ +10	+453 ₁₀ +10	+513 ₁₀ +10	+768 ₁₀ +12
1979	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+403 ₁₀ +10	+459 ₁₀ +10	+538 ₁₀ +10	+764 ₁₀ +12
1980	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+408 ₁₀ +10	+458 ₁₀ +10	+549 ₁₀ +10	+760 ₁₀ +12
1981	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+412 ₁₀ +10	+459 ₁₀ +10	+551 ₁₀ +10	+756 ₁₀ +12
1982	+1.02	+0.89	+1.00	+0.95	+417 ₁₀ +10	+470 ₁₀ +10	+557 ₁₀ +10	+752 ₁₀ +12
1983	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+422 ₁₀ +10	+488 ₁₀ +10	+579 ₁₀ +10	+748 ₁₀ +12
1984	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+427 ₁₀ +10	+505 ₁₀ +10	+613 ₁₀ +10	+744 ₁₀ +12
1985	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+431 ₁₀ +10	+512 ₁₀ +10	+644 ₁₀ +10	+739 ₁₀ +12
1986	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+436 ₁₀ +10	+511 ₁₀ +10	+660 ₁₀ +10	+735 ₁₀ +12
1987	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+441 ₁₀ +10	+513 ₁₀ +10	+665 ₁₀ +10	+730 ₁₀ +12
1988	+1.01	+0.94	+1.00	+0.90	+445 ₁₀ +10	+525 ₁₀ +10	+674 ₁₀ +10	+726 ₁₀ +12
1989	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+450 ₁₀ +10	+542 ₁₀ +10	+699 ₁₀ +10	+722 ₁₀ +12
1990	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+454 ₁₀ +10	+558 ₁₀ +10	+735 ₁₀ +10	+717 ₁₀ +12
1991	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+458 ₁₀ +10	+563 ₁₀ +10	+767 ₁₀ +10	+713 ₁₀ +12
1992	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+462 ₁₀ +10	+561 ₁₀ +10	+783 ₁₀ +10	+708 ₁₀ +12
1993	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+466 ₁₀ +10	+562 ₁₀ +10	+787 ₁₀ +10	+704 ₁₀ +12
1994	+0.99	+0.88	+1.00	+0.86	+471 ₁₀ +10	+572 ₁₀ +10	+794 ₁₀ +10	+700 ₁₀ +12
1995	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+475 ₁₀ +10	+588 ₁₀ +10	+816 ₁₀ +10	+695 ₁₀ +12
1996	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+480 ₁₀ +10	+602 ₁₀ +10	+848 ₁₀ +10	+691 ₁₀ +12
1997	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+485 ₁₀ +10	+605 ₁₀ +10	+877 ₁₀ +10	+687 ₁₀ +12
1998	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+489 ₁₀ +10	+602 ₁₀ +10	+889 ₁₀ +10	+683 ₁₀ +12
1999	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+494 ₁₀ +10	+601 ₁₀ +10	+887 ₁₀ +10	+678 ₁₀ +12
2000	+1.01	+0.83	+1.00	+0.81	+499 ₁₀ +10	+609 ₁₀ +10	+889 ₁₀ +10	+674 ₁₀ +12
2001	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+504 ₁₀ +10	+621 ₁₀ +10	+903 ₁₀ +10	+670 ₁₀ +12
2002	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+508 ₁₀ +10	+631 ₁₀ +10	+925 ₁₀ +10	+667 ₁₀ +12
2003	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+513 ₁₀ +10	+632 ₁₀ +10	+943 ₁₀ +10	+663 ₁₀ +12
2004	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+518 ₁₀ +10	+626 ₁₀ +10	+946 ₁₀ +10	+659 ₁₀ +12
2005	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+522 ₁₀ +10	+623 ₁₀ +10	+936 ₁₀ +10	+655 ₁₀ +12
2006	+1.01	+0.72	+1.00	+0.77	+526 ₁₀ +10	+628 ₁₀ +10	+928 ₁₀ +10	+652 ₁₀ +12
2007	+0.99	+0.74	+1.00	+0.77	+530 ₁₀ +10	+640 ₁₀ +10	+934 ₁₀ +10	+648 ₁₀ +12
2008	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+534 ₁₀ +10	+649 ₁₀ +10	+952 ₁₀ +10	+644 ₁₀ +12
2009	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+537 ₁₀ +10	+649 ₁₀ +10	+967 ₁₀ +10	+640 ₁₀ +12
2010	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+540 ₁₀ +10	+643 ₁₀ +10	+968 ₁₀ +10	+637 ₁₀ +12
2011	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+543 ₁₀ +10	+639 ₁₀ +10	+958 ₁₀ +10	+633 ₁₀ +12
2012	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+545 ₁₀ +10	+643 ₁₀ +10	+950 ₁₀ +10	+629 ₁₀ +12
2013	+0.97	+0.72	+0.98	+0.74	+548 ₁₀ +10	+653 ₁₀ +10	+955 ₁₀ +10	+626 ₁₀ +12
2014	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+550 ₁₀ +10	+660 ₁₀ +10	+971 ₁₀ +10	+622 ₁₀ +12
2015	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+553 ₁₀ +10	+659 ₁₀ +10	+983 ₁₀ +10	+619 ₁₀ +12
2016	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+555 ₁₀ +10	+652 ₁₀ +10	+982 ₁₀ +10	+615 ₁₀ +12
2017	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+556 ₁₀ +10	+647 ₁₀ +10	+969 ₁₀ +10	+612 ₁₀ +12
2018	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+557 ₁₀ +10	+649 ₁₀ +10	+958 ₁₀ +10	+609 ₁₀ +12
2019	+0.96	+0.68	+0.97	+0.70	+559 ₁₀ +10	+657 ₁₀ +10	+959 ₁₀ +10	+605 ₁₀ +12
2020	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+560 ₁₀ +10	+662 ₁₀ +10	+970 ₁₀ +10	+602 ₁₀ +12
2021	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+561 ₁₀ +10	+660 ₁₀ +10	+978 ₁₀ +10	+599 ₁₀ +12
2022	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+562 ₁₀ +10	+652 ₁₀ +10	+973 ₁₀ +10	+596 ₁₀ +12
2023	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+562 ₁₀ +10	+646 ₁₀ +10	+957 ₁₀ +10	+593 ₁₀ +12
2024	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+562 ₁₀ +10	+646 ₁₀ +10	+943 ₁₀ +10	+590 ₁₀ +12
2025	+0.95	+0.64	+0.96	+0.66	+563 ₁₀ +10	+652 ₁₀ +10	+941 ₁₀ +10	+587 ₁₀ +12
2026	+0.95	+0.69	+0.96	+0.66	+563 ₁₀ +10	+658 ₁₀ +10	+949 ₁₀ +10	+583 ₁₀ +12
2027	+0.95	+0.64	+0.94	+0.63	+563 ₁₀ +10	+656 ₁₀ +10	+956 ₁₀ +10	+580 ₁₀ +12

